

विषय - गणित

समय: 3 घंटे

Subject - Mathematics

पूर्णांक: 100

सामान्य निर्देश:

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में 29 प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं: अ, ब, स, तथा द। खण्ड अ में 4 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड ब में 8 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक दो अंक का है। खण्ड स में 11 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है। खण्ड द में 6 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं।
- (iv) पूर्ण प्रश्न-पत्र में विद्युत् नहीं है। फिर भी चार अंकों वाले 3 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 3 प्रश्नों में अन्तरिक्ष विद्युत् है। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विद्युत् हल करना है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

General Instructions:

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of 29 questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of 4 questions of one mark each, Section B comprises of 8 questions of two marks each, Section C comprises of 11 questions of four marks each and Section D comprises of 6 questions of six marks each.

(iii) All questions in section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice, however, internal choice has been provided in 3 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculators is not permitted.

खण्ड- अ

SECTION - A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।
Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. 2×2 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

The number of all possible matrices of order 2×2 with each entry 0 or 1 is ?

2. $\int \frac{1}{x^2+16} dx$ का मान लिखिए।

write the value of $\int \frac{1}{x^2+16} dx$

3. निम्न अवकल समीकरण के लिए इसकी कोटि व घात का योगफल ज्ञात कीजिए-

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

Find the sum of the degree and the order for the following differential equation.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

4. सदिश $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के अन्वेषण एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

Find a vector in the direction of vector $5\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ which has magnitude 8 units.

खण्ड-ब
SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं।
Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{7}{24} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

Prove that :

$$\tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{7}{24} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

6.

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

Find the value of $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

7.

फलन $f(x) = \begin{cases} Kx+1, & \text{यदि } x \leq 5 \\ 3x-5, & \text{यदि } x > 5 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन $x=5$ पर संतत है, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of K for which the function f is defined as $f(x) = \begin{cases} Kx+1, & \text{if } x \leq 5 \\ 3x-5, & \text{if } x > 5 \end{cases}$

is continuous at $x=5$

8. यदि $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।
Find $\frac{dy}{dx}$, if $x = \sin t$, $y = \cos 2t$.

9. प्रत्यावर्तन कीजिए :

$$\int \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

10. बिंदु (1,1) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2}{x}$ है। $xdy = (2x^2 + 1) dx$ ($x \neq 0$) है

Find the equation of a curve passing through the point (1,1) and whose differential equation is $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{2}{x}$. $xdy = (2x^2 + 1) dx$ ($x \neq 0$)

11. दो समतलों $3x - 6y + 2z = 7$ और $2x + 2y - 2z = 5$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the two planes $3x - 6y + 2z = 7$ and $2x + 2y - 2z = 5$.

12. A और B इसी दो घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = K$ तो K

05 मान सात कीलिए यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।
 Given that the events A and B are such that
 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ and $P(B) = k$. Find k
 if they are mutually exclusive.

रकस-स

SECTION - C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं
 Question number 13 to 23 carry 4 marks each.

13 सिद्ध कीलिए कि $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$ में $R = \{(a, b) : |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है}\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 1 से संबंधित सभी अवयवों का समुच्चय सात कीलिए।

अथवा

यदि $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीलिए कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए $f(f(x)) = x$ है। f का प्रतिनिधित्व पता क्या है?

Show that the relation R in the set $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$ given by $R = \{(a, b) : |a - b| \text{ is a multiple of } 4\}$, is an equivalence relation. Find the set of all elements related to 1 in each case.

OR

If $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \frac{2}{3}$, show that $f \circ f(x) = x$,
for all $x \neq \frac{2}{3}$, what is the inverse of f ?

14. $\tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} \right)$, $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ का सरलतम रूप में व्यक्त कीजिए।

अथवा

यदि $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Express $\tan^{-1} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$; $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ in the simplest form.

OR

If $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, then find the value of x .

15. यदि x, y, z विभिन्न हों और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

तो दर्शाइए कि $1+xyz=0$

If x, y, z are different and $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$,

then show that $1+xyz=0$

16. यदि $y = x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

If $y = x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ then find $\frac{dy}{dx}$.

17. वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ द्वारा प्रदत्त फलन f (i) निरंतर वर्धमान (ii) निरंतर ह्रासमान है।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंबे वृत्तीय बेलन की तिरछा शंकु की तिरछा की आधी होती है।

Find the intervals in which the function f given by $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ is (i) strictly increasing (ii) strictly decreasing.

OR

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.

18. ज्ञात कीजिए -

$$\int e^x \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx$$

Find -

$$\int e^x \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \right) dx$$

19. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$$

का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y=0$ यदि $x = \frac{\pi}{3}$.

Find the particular solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$$

given that $y=0$ when $x = \frac{\pi}{3}$

20. 1 और n सात डीजिए, यदि $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$

Find λ and μ if $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$

21. सदिए $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का, सदिए $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में मात्रु सदिए के साथ अदिए गुणनफल \perp के बराबर है तो λ का मान सात डीजिए।

The scalar product of the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with a unit vector along the sum of vector $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to one. Find the value of λ .

22. एक डॉक्टर वा एक रोगी के देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह सात है कि उसके ड्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन से आने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ है यदि वह ड्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ या $\frac{1}{2}$ है, परंतु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ड्रेन से आने की प्रायिकता सात डीजिए।

A doctor is to visit a patient. From the past experience, it is known that the probabilities that he will come by train, bus, scooter or by other means of transport are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ and $\frac{2}{5}$. The probabilities that he will be late are $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{12}$ if he comes by train, bus and scooter respectively but if he comes by other means of transport, then he will not be late. When he arrives, he is late. What is the probability that he comes by train?

23. एक न्याय सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चित्तों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।

Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin.

खण्ड - द

SECTION - D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं।
Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. प्रांभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित भाष्य का व्युत्पन्न ज्ञात कीजिए -

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

By using elementary operations, find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

25. यदि $y = (\tan^{-1}x)^2$ है तो दर्शाइए कि
 $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$ है।

If $y = (\tan^{-1}x)^2$, show that

$$(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$$

26. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

27. परवलय $y = x^2$ एवं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

भणवा

समाकलन का उपयोग करते हुए इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(1,0)$, $(2,1)$ एवं $(3,1)$ हैं।

Find the area of the region bounded by the parabola $y = x^2$ and $y = |x|$

OR

Using integration find the area of region bounded by the triangle whose vertices are ~~(-1,0)~~, ~~(1,3)~~ and ~~(3,2)~~ $(1,0)$, $(2,2)$ and $(3,1)$.

28. रेखाओं l_1 और l_2 के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए
जिनके सदिश समीकरण हैं:

$$\vec{r} = \hat{i} + 5\hat{j} + \lambda(2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k})$$

$$\text{और } \vec{r} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - \mu\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

अथवा

एक रेखा, एक घन के विकर्णों के साथ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोण बनाती है तो सिद्ध कीजिए कि $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$

Find the shortest distance between the lines l_1 and l_2 whose vector equations are

$$\vec{r} = \hat{i} + 5\hat{j} + \lambda(2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k})$$

$$\text{and } \vec{r} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - \mu\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

OR

A line makes angles α, β, γ and δ with the diagonals of a cube, prove that

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$$

29. एक प्रकार के कैंड की 200g आटा तथा 25g वसा (fat) की आवश्यकता होती है तथा दूसरी प्रकार के कैंड के लिए 100g आटा तथा 50g वसा की आवश्यकता होती है। कैंडों की अधिकतम संख्या बताओ जो 5 किलो आटे तथा 1 किलो वसा से बन सकते हैं; यह मान लिया गया है कि कैंडों के बनाने के लिए अन्य पदार्थों की कमी नहीं रहेगी।

One kind of cake requires 200g of flour and 25g of fat and another kind of cake requires 100g of flour and 50g of fat. Find the maximum number of cakes which can be made from 5 kg of flour and 1 kg of fat assuming that there is no shortage of the other ingredients used in making the cakes.

==o==